КУДРЯШОВА О. М., ДВОРЕЦКАЯ П. С. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ РАСКРОЯ МАТЕРИАЛА

УДК 004.02, ВАК 05.13.11, ГРНТИ 50.05.15

Использование метода целочисленного программирования в задаче раскроя материала

О. М. Кудряшова, П. С. Дворецкая

Ухтинский государственный технический университет, г. Ухта,

В статье представлено решение задачи раскроя материала с помощью метода целочисленного программирования на примере получения заготовок деревообрабатывающего производства с целью минимизации отходов производства. Для решения задачи был использован двойственный симплекс-метод и метод ветвей и границ для получения целочисленного решения. Программная реализация была выполнена в программе Delphi.

Ключевые слова: целочисленное программирование, целевая функция, оптимальное решение, задача раскроя материала, симплекс-метод, метод ветвей и границ, линейное программирование.

Using the method of integer programming in the task of cutting material

O. M. Kudryashova, P. S. Dvoretskaya

Ukhta State Technical University, Ukhta

The article presents a solution to the problem of cutting a material using the integer programming method using the example of obtaining blanks for woodworking production in order to minimize production waste. To solve the problem, the dual simplex method and the branch and bound method were used to obtain an integral solution. The software implementation was performed in the Delphi program.

Key words: integer programming, objective function, optimal solution, material cutting problem, simplex method, branch and bound method, linear programming.

Введение

Успех любого производства в большей мере зависит от грамотного и выгодного использования имеющихся ресурсов любого рода, к примеру, рабочей силы, денежных средств или же сырья. В связи с этим на производстве часто решаются различные оптимизационные задачи распределения и эксплуатации ресурсов для наиболее выгодной работы предприятия.

Одной из подобных задач является задача раскроя материала, широко применяемая в деревообрабатывающем производстве. Цель данной задачи – получить заготовки необходимых размеров при максимально выгодном использовании исходного материала.

В общем случае задачу о раскрое можно сформулировать следующим образом: на раскрой поступает исходный материал одинакового размера. Его требуется раскроить на заготовки определённого размера в заданном количестве таким образом, чтобы суммарное количество остатков материала было минимально. Существует и другая постановка задачи, где при раскрое необходимо использовать как можно меньше исходного сырья для изготовления заготовок в требуемой комплектации.

Выделают два этапа решения данной задачи.

На первом этапе необходимо найти рациональные способы распила единицы исходного материала на заготовки указанных размеров. На данном шаге решения задачи должно быть определено количество вариантов раскроя и количество деталей каждого вида, получаемых при различных вариантах раскроя. Сами варианты раскроя могут составляться как специалистом-раскройщиком, так и при помощи ЭВМ.

На втором этапе определяется наиболее рациональное использование найденных способов раскроя для получения заготовок в необходимой комплектации.

Как и для любой экономической задачи, для задачи раскроя можно составить ее математическую модель, которая упрощенно и формализовано отображает зависимости и характеристики, присутствующие в ней.

Целевая функция (1) и ограничения (2) задачи о раскрое с поиском минимального количества остатков от распила представлена ниже:

$$Z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m \to min \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n \ge b_n \end{cases} \tag{2}$$

i – количество заготовок, i = 1..n

j – количество вариантов раскроя, j = 1..m

a_{ij} – количество заготовок i-го вида полученных при раскрое единицы исходного материала по варианту j

x_j – количество исходного материала, которое необходимо раскроить по варианту j

b_i – необходимое количество заготовок i-го типа

c_j – остаток от раскроя по j-ому варианту

Для другой постановки задачи ограничения останутся прежними, но целевая функция (3) для нахождения минимального расхода материала будет выглядеть следующим образом:

$$Z(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to min \tag{3}$$

Таким образом, задачу раскроя можно свести к задаче линейного программирования, так как ее целевая функция и ограничения принимают линейный вид. Оптимальным решением (планом) задачи является допустимый, то есть соответствующий ограничениям, набор переменных, при котором целевая функция достигает своего экстремума. Для задачи раскроя целевая функция при любой из постановок задачи должна принимать свое минимальное значение.

Для нахождения решения задачи с ослабденными ограничениями был выбран двойственный симплекс-метод. В ходе решения задачи двойственным симплекс-методом могут возникнуть дробные значения переменных, составляющих оптимальный план. Переменные данной задачи не могут принимать дробные значения, поскольку они обозначают количество единиц материала, раскраиваемых по определенному способу. Округление этих значений невозможно, поскольку данное действие может привести к сильному искажению исходного результата, причем полученный план может стать далек от оптимума.

Для получения целых значений был использован метод целочисленного линейного программирования, позволяющий на основе имеющегося нецелочисленного плана получить целочисленное решение, являющееся оптимальным.

Существует несколько методов решения задачи целочисленного линейного программирования. Наиболее распространенными из них являются метод отсекающих плоскостей Гомори и метод ветвей и границ.

Для программной реализации выбран метод ветвей и границ, разработанный А. Лэндом и Э. Дойгом в 1960 году.

Подробнее рассмотрим алгоритм метода ветвей и границ для задачи минимизации.

На начальном этапе решается исходная задача линейного программирования с ослабленными ограничениями, то есть не учитывается условие целочисленности для переменных. Если полученное решение уже является целочисленным, решение задачи на этом этапе заканчивается без использования рассматриваемого метода. В противном случае исходная задача разбивается на две подзадачи, путем добавления дополнительных ограничений к каждой из них.

Вводимые в задачу ограничения составляются по определенному принципу. Пусть xi - целочисленная переменная, значение которой в оптимальном решении получилось дробным. Тогда пусть ai– целая часть значения xi. Интервал (ai,ai+1), в котором содержится xi, состоит из бесконечного множества дробных чисел и не содержит целых значений (Рисунок 1).

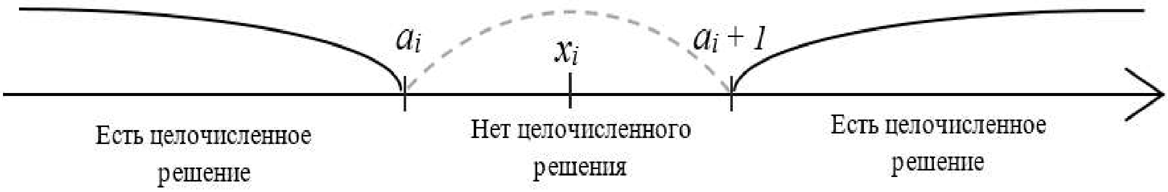

Рисунок 1. Интервалы, содержащие целочисленные и не целочисленные решения

Поэтому допустимое целое оптимальное значение xi должно принадлежать одному из интервалов, определяемых неравенствам (4) и (5):

$$x_i \le a_i \tag{4}$$

$$x_i \ge a_i + 1 \tag{5}$$

Именно неравенства (4) и (5) будут являться дополнительными ограничениями подзадач.

Введение ограничений порождает две несвязанные между собой задачи, так как множества, в которых ищутся решения, не пересекаются. Каждая из них решается как задача линейного программирования с исходной целевой функцией двойственным симплекс-методом.

На данном этапе необходимо оценить полученные подмножества решений подзадач, чтобы определить так называемое «перспективное подмножество», то есть подмножество, где более вероятно получение наилучшего оптимального целочисленного решения. Оценка осуществляется путем сравнения значений целевых функций решенных подзадач. Для задачи минимизации перспективным считается то множество, где целевая функция принимает наименьшее значение.

Если на данном этапе перспективное подмножество содержит нецелочисленные значения, то описанный выше процесс ветвления повторяется для подзадачи, в которой получено наилучшее решение.

По ходу решения задачи необходимо фиксировать наиболее оптимальные целочисленные планы, называемые верхней границей или рекордом. На начальном этапе задается граница значения целевой функции задачи принимается равной $+\infty$. Подзадача с наилучшим решением определяет новую границу для значения целевой функции, если значения переменных являются целочисленными и значение целевой функции улучшено по сравнению с текущим рекордом.

Если ветвление подзадачи невозможно, то есть в ней получено целочисленное решение, рассматриваемый процесс завершается. Оптимальным целочисленным планом задачи будет зафиксированный в ходе решения рекорд.

Рассмотрим процесс решения задачи на конкретном примере.

Листы материала размером длиной 1,5 м и шириной 2 м необходимо раскроить так, чтобы получились заготовки трех типов:

- 5 заготовок размерами 1,4 м × 0,7 м,
- 4 заготовки 1,6 м × 1 м
- 2 заготовки 0,5 м × 0,5 м

При этом расход материала должен быть минимальным.

Введем данные в программу (Рисунок 2):

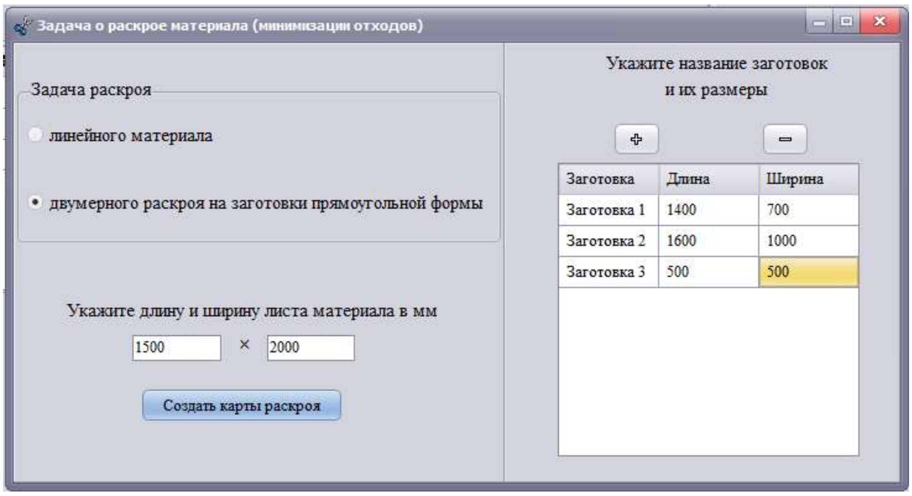

Рисунок 2. Исходные данные задачи

По исходным данным программа автоматически просчитает варианты раскроя.

По полученным вариантам (Рисунок 3) составим ограничения и целевую функцию представленной задачи:

$$Z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 5 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_4 + 8x_5 + 12x_6 \geq 2 \end{cases}$$

Для дальнейшего решения задачи вводим количество необходимых заготовок и выбираем тип решаемой задачи (Рисунок 3):

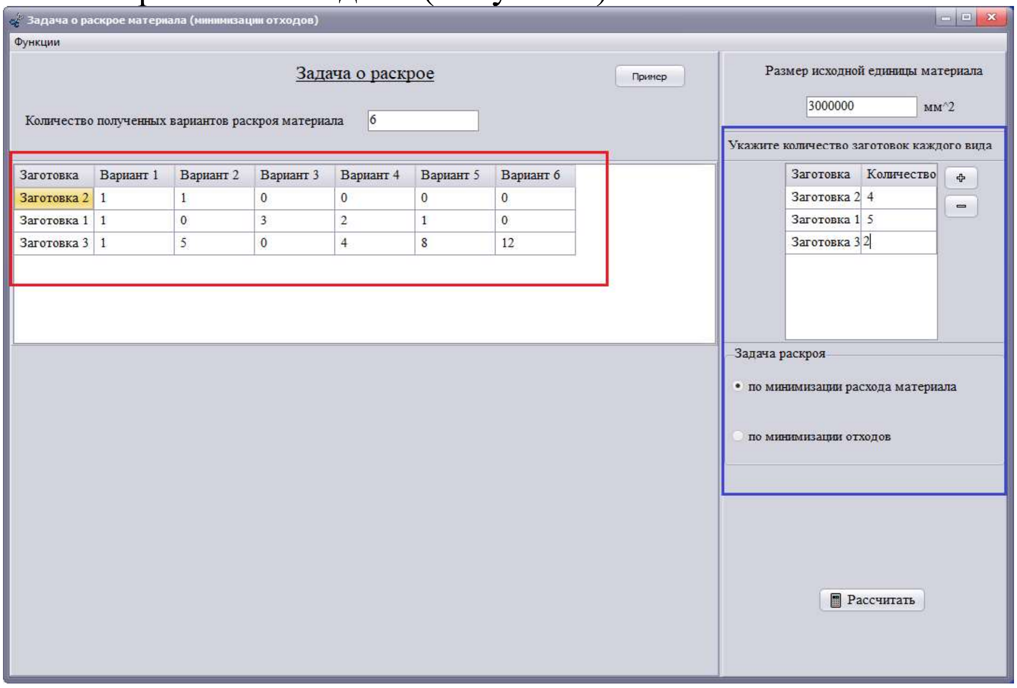

Рисунок 3. Дальнейший ввод исходных данных и выбор типа задачи

Получаем следующее решение (Рисунок 4):

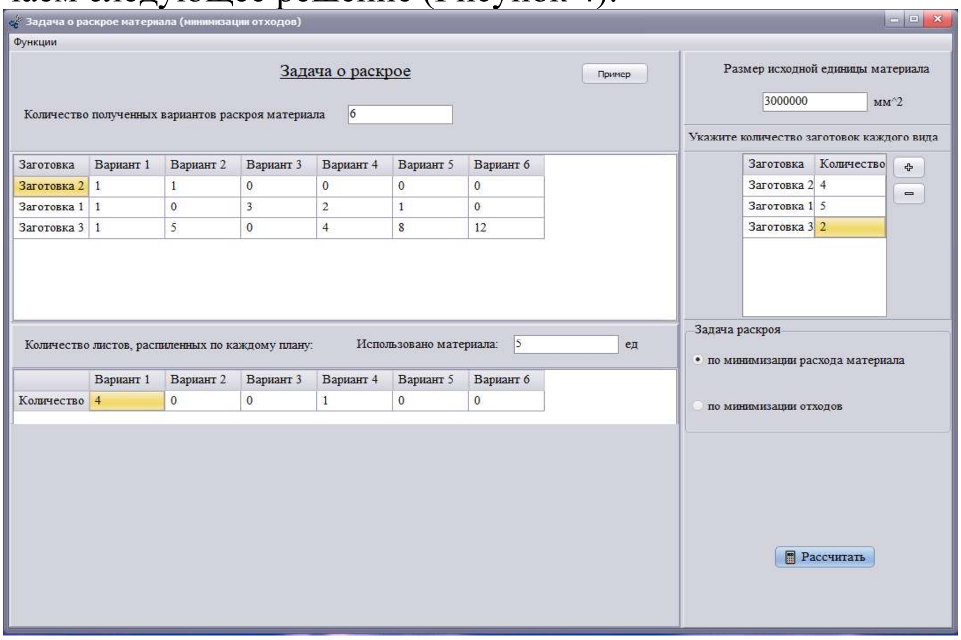

Рисунок 4. Решение задачи по минимизации расходного материала

Решим эту же задачу для минимизации остатков. Вместе с составленными вариантами раскроя находятся и остатки от распила (Рисунок 5).

Целевая функция примет вид:

$$Z(x) = 170000x_1 + 150000x_2 + 60000x_3 + 40000x_4 + 20000x_5$$

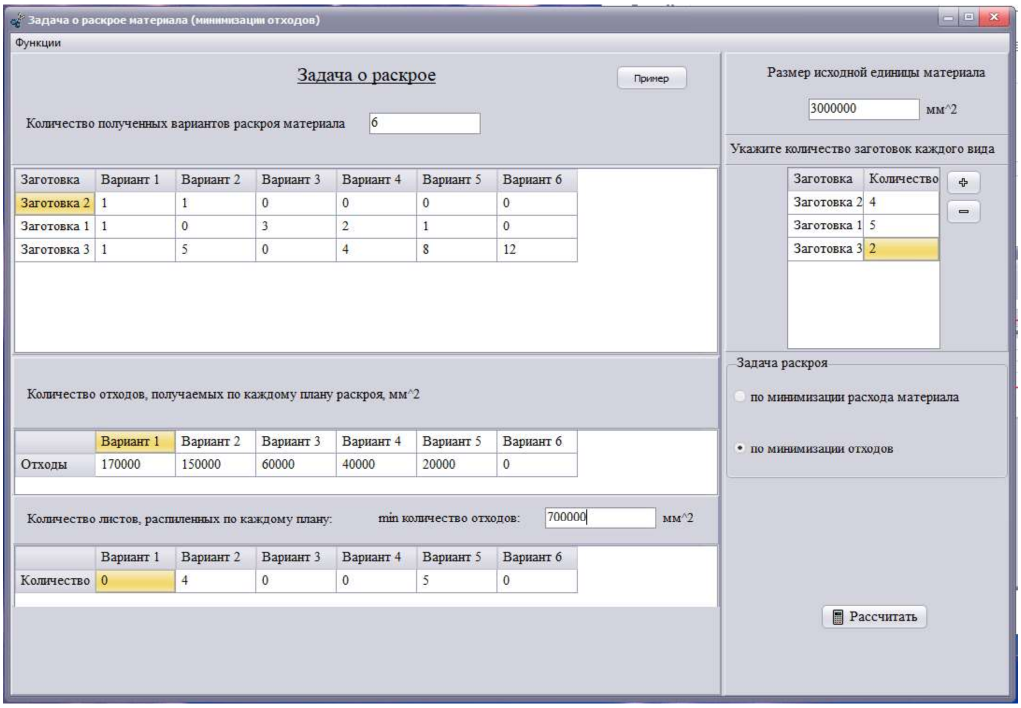

Рисунок 5. Решение задачи по минимизации отходов

Разработанная программа сможет облегчить работу специалиста по составлению карт раскроя на предприятиях, занимающихся производством мебели на заказ или распилом материала на заготовки. Но это не означает ограниченность области применения данного программного обеспечения, поскольку алгоритм раскроя универсален для всех видов листового материала, например, гипсокартона, металла или бумаги. Также программа позволяет отыскать наиболее выгодные способы использования ресурсов, позволяющие экономить закупаемое сырье.

В дальнейшем возможно добавление новых функций в программу, например, возможность распила нескольких видов исходного материала или составление вариантов раскроя для изделий фигурной формы, а также визуализация полученных способов раскроя для более наглядного их представления.

Список использованных источников и литературы

1. Кудряшова, О. М. Математические модели информационных процессов управления : методические указания к выполнению курсовой работы / О. М. Кудряшова. – Ухта: УГТУ, 2014. – 68 с.

2. Фомин, Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник / Г. П. Фомин – М.: Финансы и статистика, 2009. – 640 с.

3. Таха, Х. «Введение в исследование операций». – М.: Мир, 1985. Т.1,2.

4. Фурина К. О. «Методы целочисленного программирования на примере задачи об оптимальном раскрое материала», журнал «Научных и прикладных исследований», №8. – 2015. – С. 97-101. Режим доступа: https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=34106170.

5. Шиндина Е. А., Уразаева Т. А. «Применение метода ветвей и границ для решения задачи целочисленного программирования», журнал «Научному прогрессу – творчество молодых», №3. – 2016. – С. 319-321. Режим доступа: https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=34464980

List of references

1. Kudryashova, O.M. Mathematical models of information management processes: guidelines for the implementation of term paper / O.M. Kudryashova. – Ukhta: USTU, 2014 . – 68 p.

2. Fomin, G.P. Mathematical methods and models in commercial activity: textbook / G.P. Fomin – M .: Finance and statistics, 2009. – 640 p.

3. Taha, X. Introduction to Operations Research. – M .: Mir, 1985. Vol. 1.2.

4. Integer programming methods on the example of the problem of optimal material cutting, https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=34106170, accessed May 12, 2021.

5. Application of the branch and bound method for solving an integer programming problem, https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=34464980 accessed May 13, 2021.